PEL Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana
2015, 52(2), 172-188

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Educación

Análisis cognitivo de la secuencia numérica: procesamiento de la información y epistemología genética

Cognitive Analysis of Numerical Sequences: Information Processing and Genetic Epistemology

Catalina María Fernández Escalona

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Málaga, España

Resumen

Esta es una investigación que trata sobre la interpretación y construcción del conocimiento ordinal de la secuencia numérica en el niño. El referente teórico elegido es el de las relaciones lógicas ordinales que se dan entre los términos de la secuencia numérica. El análisis de cómo se da esa construcción del conocimiento se realiza a través de las distintas interpretaciones cognitivas desde dos modelos bien distintos: modelo piagetiano y procesamiento de la información. En el primero se trata la estructura lógica de seriación subyacente a la secuencia numérica y en el segundo se analiza la conceptualización y funcionalidad como componente del conteo. El resultado principal es que hay una nueva forma de estudiar el desarrollo de la secuencia numérica en el niño mediante las relaciones lógicas ordinales. Los dos modelos considerados tratan sobre el desarrollo del número natural, y en este trabajo se analiza bajo el prisma de esos dos modelos el desarrollo de la secuencia numérica mediante las relaciones lógicas ordinales. Dichas relaciones no han sido objeto específico de estudio ni en el modelo piagetiano ni en el modelo de integración de habilidades, lo cual significa que la investigación aquí realizada es totalmente inédita y original.

Palabras clave: ordinal, relaciones lógicas ordinales, número, secuencia numérica

Correspondencia a:
Catalina María Fernández Escalona
Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales
Facultad de Ciencias de la Educación.
Campus de Teatinos s/n, Código Postal 29071, Málaga, España.
Correo electrónico: cfernandez@uma.es
Agradecimiento a los miembros del Grupo de Investigación HUM 205: Educación Infantil y Formación de Educadores, Universidades de Andalucía.

ISSN: 0719-0409 DDI: 203.262, Santiago, Chile
doi: 10.7764/PEL.52.2.2015.10

Abstract

This research line discusses the ways in which children interpret and build knowledge of ordinal numerical sequences. The logical-ordinal relationships that exist between terms of numerical sequences constitute the theoretical reference for this study. The analysis of how that knowledge-building occurs is carried out through different cognitive interpretations based on two very distinct models: the Piagetian model and information processing. The first model focuses on the logical structure of seriation underlying numerical sequences, while the second looks at conceptualization and functionality as part of counting. The main result is a new way to study the development of numerical sequences in children by means of logical-ordinal relationships. The two models considered address the development of the natural number. This study analyzes the development of numerical sequences by means of logical-ordinal relationships through the lens of these two models. Neither the Piagetian model nor the skills integration model has specifically focused on these relationships, indicating that the research conducted here is unprecedented and original.

Keywords: ordinal, logical ordinal relationships, number, number sequence

El presente trabajo trata sobre el análisis de dos grandes líneas de investigación referentes al desarrollo del número en el niño bajo la óptica de las relaciones lógicas ordinales existentes entre los términos de la secuencia numérica. Teniendo en cuenta los estudios sobre dicho desarrollo (Brannon, 2002; Fernández y Ortiz, 2008; Fuson & Hall 1983; Mix, Sandhofer, Moorey, & Russell, 2012; Slusser & Sarnecka, 2011), han surgido dos grandes líneas de investigación, que se han proyectado en los trabajos sobre enseñanza y aprendizaje de este concepto: por una parte, el *modelo lógico piagetiano* (Piaget & Szeminska, 1964) y, por otra, el *modelo de integración de habilidades (procesamiento de la información)* (Gelman & Gallistel, 1978).

Comparando los dos modelos en términos del objeto común que estudian, el desarrollo del número en el niño, desde una perspectiva del conocimiento se encuentra la psicología evolutiva de Piaget; en este modelo la evolución del desarrollo infantil suele ser más exigente, preocupándose de la madurez cognitiva (Piaget, 1981; Serrano, 2008); en cambio, el otro enfoque favorece la precocidad y la cuantificación de lo dado (Gelman & Gallistel, 1978; Sarnecka & Gelman, 2004).

Aunque se dan algunas relaciones entre los dos modelos, cabe hacer hincapié en que ambos marcos teóricos no son paralelamente comparables, en el sentido de que el primero hace referencia a la construcción conceptual y operatoria del número, mientras que el segundo permite la creación de un modelo de conteo, según se indica en la Figura 1. Aun no siendo paralelamente comparables tienen un denominador común, a saber, el estudio del desarrollo del número en el niño, pero se insiste en que no son paralelamente comparables puesto que el modelo lógico-piagetiano trata la construcción conceptual y operatoria del número y rechaza el conteo práctico o empírico, mientras que en el modelo de integración de habilidades se priorizan los modelos de conteo y el número es tratado como operador cuantificador mediante la acción de contar.

Si se toma como marco referencial la teoría de procesamiento de la información, el análisis de la secuencia numérica pasa por ser una componente del conteo; mientras que si se toman como referencia las teorías lógicas-piagetianas, se pasa a estudiar la secuencia numérica bajo la estructura operatoria de seriación relacionada con el razonamiento inductivo (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

Hay que decir que en este trabajo se realiza un análisis atendiendo a los dos modelos sobre el desarrollo del número, según aparece en el esquema de la Figura 1. Dicho análisis se lleva a cabo mediante reflexiones de la autora para cada uno de los modelos en función de investigaciones empíricas (Fernández y Ortiz, 2008), sobre las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica, siendo el hilo conductor de dichas reflexiones la comparativa de los dos modelos en cuanto al desarrollo de la secuencia numérica en el niño y haciendo un tratamiento del número como elemento de una secuencia o serie, obviando su aspecto cardinal, al mismo tiempo que toma relevancia el aspecto ordinal.

Fernández y Ortiz (2008) realizan una investigación empírica con 27 niños con edades comprendidas entre los tres y seis años para estudiar el uso ordinal del conteo. Se quiere probar que el origen del conteo está supeditado a relaciones lógico-ordinales que se desarrollan en el proceso de construcción mental del número natural. Muchas de estas relaciones se han considerado en las investigaciones en psicología infantil (modelo piagetiano y procesamiento de la información) sin la trascendencia pertinente, ya que, en las mismas, el aspecto cardinal del número natural se ha considerado como soporte del aspecto ordinal.

En la citada investigación se han utilizado entrevistas semiestructuradas para recoger la información de un modo organizado. Estas entrevistas conllevan unas preguntas claves que han de responder todos los entrevistados. Todas las entrevistas han sido grabadas en audio y video. El objetivo de las entrevistas consiste en observar cómo se manifiestan los niños ante la relación lógico-ordinal de «siguiente inmediato» entre términos consecutivos de la secuencia numérica mediante la comparación que se presenta entre ellos a través de la relación establecida por una correspondencia serial dada, correspondencia que debe establecer el niño entre una serie con un criterio de alternancia simple y la serie de la secuencia numérica. Las tareas soporte de la entrevista posibilitan, de acuerdo con las respuestas obtenidas, establecer un escalograma para organizar a los individuos en niveles diferenciados desde un punto de vista evolutivo.

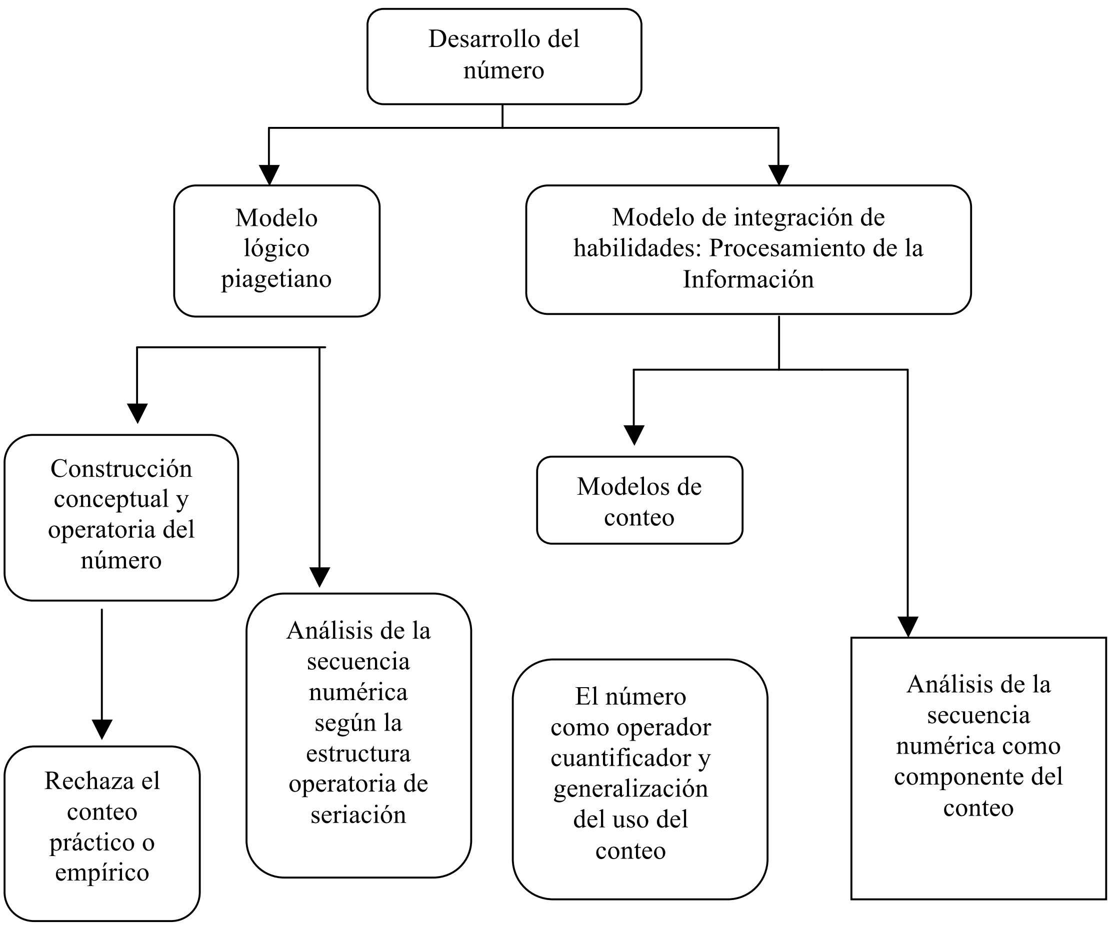

Figura 1. Desarrollo del número según las corrientes: Modelo Lógico y Procesamiento de la Información.

Nos situamos dentro del procesamiento de la información y, desde esta perspectiva, estudiaremos la secuencia numérica como componente del conteo.

Tras haber situado la secuencia de numerales con relación al conteo como procedimiento más global en el que se integra, pasaremos al análisis de la misma dentro de las corrientes procesuales, estudiando en primer lugar su conceptualización y posteriormente el carácter funcional ordinal. En el citado análisis insertaremos algunas matizaciones puntuales, que no se encuentran en este marco teórico, acerca de las componentes lógicas que interrelacionan a todos y cada uno de los términos de la secuencia, siendo las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica el hilo conductor de todas las reflexiones y análisis que se están dando en este artículo.

Finalmente, estudiaremos la estructura lógica de seriación subyacente a la secuencia numérica, analizando los elementos propios de esta estructura que se dan en la secuencia numérica.

Secuencia numérica y acción de contar

Se ha descubierto que los niños manejan la secuencia de numerales desde muy temprano (Fuson & Hall, 1983), pero es posible que solo sepan que la secuencia de conteo se compone de números y que estos han de repetirse siempre en el mismo orden (Brainerd & Gordon, 1994; Sánchez, 2013), sin que por ello se infiera una cierta comprensión conceptual, según la cual el orden de emisión de los términos se mantiene constante o cada número es único.

Se tiene que existe un conocimiento memorístico en el recitado, y se alude a una comprensión conceptual. Dicha comprensión implica dos aspectos básicos: por un lado, está el orden en el que aparecen los términos en el recitado, el cual es una propiedad invariante, lo que hace que los numerales estén entrelazados por una relación de «siguiente». Por otra parte, está la propiedad antisimétrica; la relación de siguiente inmediato en matemáticas cumple esta propiedad, puesto que si un término a es siguiente inmediato de un término b y b es siguiente inmediato de a, entonces a y b son iguales, y dicha propiedad garantiza que los elementos no se repitan.

Fuson y Hall (1983) realizan un estudio longitudinal transversal que va de los dos años hasta los ocho para analizar la *adquisición y elaboración* de la secuencia de numerales. Estas dos fases en algún momento llegan a solaparse, ya que se precisa un largo período para adquirir y consolidar la secuencia. Por ejemplo, se puede comenzar el proceso de establecimiento de relaciones entre los primeros términos, mientras que se está alargando el tamaño de la misma; en otras palabras, el primer fragmento de la secuencia puede estar en fase de elaboración, mientras que el extremo final está en plena fase de adquisición.

Durante la fase de adquisición, se realiza el aprendizaje de la secuencia convencional y el niño comienza a aplicarla en situaciones de conteo. La secuencia funciona como una estructura global unidireccional que consta de los siguientes fragmentos: una parte inicial estable y convencional; a continuación, un fragmento estable no convencional; y la parte final, compuesta por fragmentos que no son convencionales ni estables.

En la fase de elaboración, los vínculos entre los elementos se fortalecen y los términos contiguos pueden emitirse al margen de la secuencia global. Cada término puede emplearse como elemento de apoyo para recordar inmediatamente el anterior o posterior. Esta fase, según Fuson y Hall (1983), se subdivide en cinco niveles: cuerda, cadena irrompible, cadena rompible, cadena numerable y cadena bidireccional.

Se pueden reinterpretar los niveles de Fuson y Hall sobre la base de la estructura lógica de seriación y las relaciones lógicas ordinales como sigue:

1. La relación entre los términos de la secuencia numérica es antisimétrica. Quiere decir que cada término de la secuencia ocupa un lugar único y se emite una sola vez. En las actuaciones de los niños ante una situación de conteo o simplemente en una situación de recitado de la secuencia, este esquema se pone de manifiesto si los niños emiten la secuencia sin repetir ningún término de la

misma (esto, en cuanto al recitado) y no cuentan un lugar dos veces (esto, en cuanto a situaciones de conteo).

2. La secuencia numérica es una sucesión de siguientes que empieza en uno. Quiere decir que la secuencia numérica no se emite como un todo, sino que hay diferenciación entre los términos ya que cada uno de ellos, excepto el primero, se emite a continuación de otro. Se determina que cada término tiene un único siguiente, pero hasta este momento, para los niños, estos siguientes aparecen siempre que la secuencia se emita empezando por uno. En cuanto a las actuaciones de los niños, este esquema se pone de manifiesto si son capaces de establecer una correspondencia uno a uno entre los objetos del conjunto contable y la secuencia numérica en oposición al «gesto rasante», propio de los niños que emiten la secuencia como un todo.
3. La sucesión de siguientes es una característica que se mantiene ante cualquier división realizada en la secuencia numérica. El que un término sea el siguiente de otro es independiente del primer término elegido para el inicio del conteo. Por lo tanto, es una propiedad que se conserva con independencia de la referencia inicial. En las actuaciones de los niños, y siguiendo un orden lógico de evolución según los niveles de Fuson y Hall, este aspecto se manifiesta cuando los niños son capaces de contar a partir de un término cualquiera, sin tener que empezar por uno.
4. Tramo finito en la sucesión de siguientes. El primer elemento es considerado aquel que es anterior a todos los dados y el último, aquel que es posterior. En las actuaciones de los niños que tienen en cuenta este esquema lógico-matemático está el poder contar o emitir la secuencia desde un término cualquiera *a* hasta otro término cualquiera *b*, considerados a y b, respectivamente, primero y último.
5. Diferentes sentidos: ascendente y descendente en la sucesión de siguientes. En la emisión de la secuencia, tanto en un sentido ascendente como descendente, se manifiestan varios esquemas lógicos:
   - ✓ Se puede determinar tanto el siguiente como el anterior de un elemento dado cualquiera.
   - ✓ Análogamente a la sucesión de siguientes a partir de un término *a* cualquiera, se tendría una sucesión de anteriores.
   - ✓ Al igual que se adquiere el conocimiento de «todos los posteriores», se obtiene la clase de «todos los anteriores».
   - ✓ Del mismo modo que se puede determinar la posición de un término tomando como referencia una posición anterior a través del recuento progresivo, se puede determinar la posición de un término tomando como referencia una posición posterior a través del recuento regresivo.

Para finalizar, incluimos una tabla de resumen en la que se indican nociones que deben tener en cuenta los maestros para la actuación en el aula, atendiendo a los niveles de Fuson y Hall (1983).

Tabla 1
Niveles de dominio de la secuencia numérica y consecuencias para la actuación en el aula

Dominio de la secuencia numérica en la acción de contar	
Niveles	Para la actuación en el aula
1. Cuerda. La sucesión de términos se produce empezando por uno y los términos no están bien diferenciados.	✓ Recitado de la secuencia numérica por el propio valor del recitado. ✓ Canciones que estimulen el aprendizaje rítmico y lingüístico de la secuencia.
2. Cadena irrompible. La sucesión de términos se produce empezando por uno y los términos están bien diferenciados.	Actividades de tipo: ✓ Construir un conjunto con un número dado de elementos. ✓ Encontrar el elemento enésimo de una serie.
3. Cadena rompible. La sucesión puede comenzar por un término *a* cualquiera.	Actividades que conlleven estas situaciones: ✓ Siguiente de un número menor que 10. ✓ Continuar una decena. ✓ Siguiente de un número con cambio de decena.

4. Cadena numerable. Contar n términos a partir de *a*, hay que dar otro término *b* como respuesta.	Actividades con estas situaciones: ✓ Contar desde *a* hasta *b*, considerando todos los casos posibles (misma decena, cambio de decena, etc.). ✓ Contar desde *a* n términos considerando todos los casos posibles (a y n menores que 10, entre 10 y 20, entre 20 y 30, etc. Contar de 10 en 10, de 11 en 11, etc.).
5. Cadena bidireccional. La sucesión se puede recorrer hacia arriba o hacia abajo desde un término cualquiera. Se puede cambiar fácilmente de dirección.	✓ Estudio de todos los casos que se pueden dar entre *a* y *b* y entre *a* y *n.* ✓ Anterior y posterior de un número *a.* ✓ Comparar *a* y *b* en los casos: - *a* y *b* en la misma decena. - *a* y *b* en distinta decena.

En otro orden de cosas y siguiendo con la secuencia numérica como componente del conteo, vamos a centrarnos en un aspecto importante del que hasta ahora no hemos hecho mención, a saber, lo relativo al carácter convencional o social de los términos.

La cuestión que se aborda en este momento es ver si cualquier «lista» vale para contar o si, por el contrario, la «secuencia numérica» es insustituible.

En cuanto a la cuestión planteada, hay diferentes posturas: para Gelman y Gallistel (1978), con el principio de orden estable, o para Wagner y Walters (1982), quienes distinguen una forma «fuerte» y otra «débil» del mismo principio, cualquier lista vale, mientras que autores como Fuson y Hall (1983) defienden que la secuencia de numerales es insustituible. Ante esta discusión, hay que centrarse en el uso de la secuencia numérica frente a cualquier otra lista, y esto por varias razones: (a) es un aprendizaje temprano en el escolar por razones socioculturales y (b) la serie numérica tiene características estructurales propias que no tiene cualquier otra serie, a no ser que se le aplique un isomorfismo (es decir, una aplicación biyectiva entre dos sistemas que mantiene la estructura) estructural a una secuencia de diez dígitos.

Fuson y Hall justifican que la secuencia de numerales es insustituible según cuatro puntos de apoyatura: (1) la información aportada por algunos estudios (Bermejo y Bermejo, 2004; Fuson, 2000, que tratan del dominio del conteo en los niños) en los que se muestra que los escolares conciben la lista convencional de numerales como un instrumento insustituible; (2) el hecho de que juzguen como erróneos los conteos en los que una marioneta no aplica debidamente la secuencia de conteo (marioneta es un muñeco que Fuson y Hall, 1983, utilizan en una de sus pruebas, donde si un niño hace un conteo erróneo entra en acción la marioneta y realiza el mismo conteo de manera también errónea y, entonces, el niño detecta que la marioneta se ha equivocado); (3) el segmento estable convencional que encabeza todas las secuencias emitidas por los escolares (incluso a partir de los dos años y medio), ya que reflejan los intentos realizados por los mismos para aprender «la lista especial» de conteo; y (4) la anterioridad de las secuencias estables sobre la comprensión de la cardinalidad.

Existen otras posturas en las que los números están ligados por una relación de siguiente y no por estructuras concretas (Fernández, 2010; Fernández y Ortíz, 2008; Muldoon, Lewis, & Towse, 2005). No podemos dejar de considerar las aportaciones de Song y Ginsburg (1988) con sus estudios sobre la naturaleza de los elementos de la secuencia de conteo. En estos estudios transculturales se observa que en casi todos los lenguajes los numerales hasta 100 se producen a través de un sistema basado en reglas para combinar unidades y decenas. La secuencia numérica cuenta con un sistema de generación que sustituye al aprendizaje memorístico a partir de 10.

Ante esto, cabe señalar que se adoptarán posturas al respecto cuando se analice la secuencia numérica bajo la óptica de la estructura lógica de seriación, según la cual los términos estarán entrelazados por la relación de siguiente, que a su vez conducirán a la construcción operatoria de la estructura subyacente en la sistematización de la secuencia. Se está analizando la secuencia numérica como componente del conteo; más adelante se analizará en el paradigma piagetiano, pero hay que aclarar que en ambos modelos el contexto investigativo que se sigue es el de las relaciones lógicas ordinales existentes entre los términos de la secuencia numérica.

Autores como Song y Ginsburg (1988) defienden el aprendizaje memorístico de la secuencia al menos en lo concerniente al tramo 1-10, ya que entienden que la habilidad numérica temprana de los escolares se debe a la creación de hábitos y, por lo tanto, proponen que la aplicación mecánica del procedimiento de conteo vaya siendo paulatinamente modificada por la comprensión del mismo.

La Figura 2 resume esquemáticamente el estudio precedente.

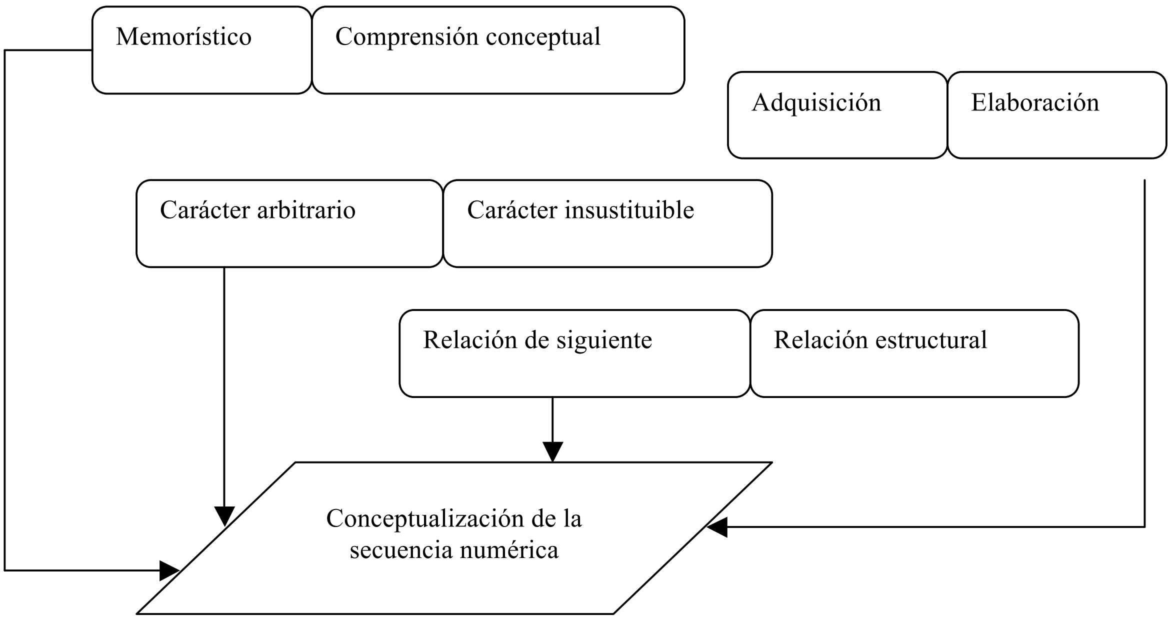

Figura 2. Conceptualización de la secuencia numérica contextualizada en las teorías de Procesamiento de la Información.

Carácter funcional de la secuencia numérica en un contexto ordinal

Una vez que se ha conceptualizado la secuencia numérica como componente del conteo en las teorías de procesamiento de la información, completamos el estudio analizando el carácter funcional.

La habilidad de contar no tiene una meta en sí misma; se trata de una estrategia muy potente en el desarrollo matemático del escolar. Con respecto al conteo, existen dos líneas de investigación: por una parte, está la conceptualización y, por otra, su carácter funcional. La primera se interesa, sobre todo, por cómo los niños comprenden y coordinan cada uno de sus componentes, así como su curso evolutivo, mientras que la segunda pretende determinar la capacidad de los niños para resolver problemas.

Entonces, paralelamente a las investigaciones centradas en el estudio del conteo exclusivamente, existen otras en las que se pretende determinar la capacidad de los escolares para resolver problemas en los que el conteo se usa como procedimiento (DeSoto, 2004).

La secuencia numérica ha sido analizada en el apartado anterior como una componente del conteo y, a su vez, este ha sido tratado como un procedimiento en sí mismo en el ámbito de conceptualización aludido anteriormente. En este apartado se da un giro en dicho tratamiento y se mira hacia el valor funcional; de este modo, se trata de reflexionar sobre cómo se manifiestan los nexos lógicos entre los términos numéricos a través de su uso.

Lo que se pretende es usar el valor funcional del conteo para establecer relaciones ordinales entre los numerales. Por tanto, siempre que se hable de componentes lógicos subyacentes a la secuencia numérica, se referirá a las relaciones ordinales entre sus términos y no será objeto de estudio en este trabajo la lógica subyacente al aspecto cardinal del número natural. El objeto de estudio de este trabajo es la comparación de enfoques entre el modelo piagetiano y procesamiento de la información, pero esa comparación se produce bajo el razonamiento de las relaciones lógico-ordinales existentes entre los términos de la secuencia numérica, lo que nos lleva a un estudio ordinal de la misma sin trabajar el aspecto cardinal.

Así como el aspecto cardinal del número natural ha sido tratado con profundidad en las teorías procesuales sobre la funcionalidad del conteo, no se ha encontrado un tratamiento similar en todo lo concerniente al aspecto ordinal. La mayoría de los trabajos encontrados en la literatura (Gelman & Gallistel, 1978; Klahr & Wallace, 1973; Schaeffer, Eggleston, & Scott, 1974) con relación a ello lleva como soporte mental la cardinalidad. Es una comparación ordinal cuantitativa: cada número de la secuencia representa el cardinal de un conjunto para después realizar la comparación entre los términos. Esta visión se enmarca dentro de la construcción lógica de Bertrand Russell (1982): el número natural se define a través de cardinales finitos y posteriormente se definen las relaciones de orden. (Para una definición formal de número natural y secuencia numérica, véase Fernández, 2010).

En esta línea se sitúan los trabajos de Bermejo y Lago (1991) para estudiar el carácter funcional del conteo en las tareas de orden. Parece ser que esta es una forma útil de evitar el conocimiento puramente memorístico; los autores sostienen la idea de que si en una tarea no interviene la cantidad, los niños no son capaces de establecer comparaciones ordinales entre los numerales, ya que estas adquieren la forma «más/después» y «menos/antes». En consecuencia, parecen habituales las tareas en las que se adopta la forma en la que se comparan dos números que representan dos números cardinales obtenidos previo conteo: se trata de las habituales tareas de comparación de magnitudes, como por ejemplo tareas en las que el niño tiene que decidir si quiere comer 5 o 7 pasteles en los que previamente se ha presentado un conjunto con 5 pasteles y otro con 7.

En contraposición con estos trabajos, la autora de este artículo defiende la hipótesis relativa a las tareas óptimas en las que se ponen de manifiesto exclusivamente las relaciones ordinales, la cual consiste en la resolución de problemas concretos sobre el número ordinal, es decir, determinar la posición de un término en una serie que previamente se ha considerado un conjunto contable para continuar siendo un conjunto ordenado (Fernández y Ortiz, 2008).

Las tareas en las que a través de la secuencia numérica se tiene que determinar una posición ordinal de un elemento en un conjunto contable, evalúan solo y exclusivamente las competencias ordinales del sistema a través de su uso. Estas tareas son relevantes para este estudio frente a otras en las que el recitado de la secuencia puede ser memorístico, y si se pone al escolar simplemente a contar objetos, resultaría difícil evaluar si establece o no relaciones lógicas entre sus términos; o bien, si se proponen las habituales tareas de comparación de magnitudes, se está evaluando el «isomorfismo» entre la cardinalidad y la ordinalidad (es decir, «*a* es mayor que *b* si, y solo si, *a* es posterior a *b*») y esto se aleja del objetivo, que no es otro que la comparación de dos términos cualesquiera de la secuencia a través de la posición ordinal que ocupan en esta (Sánchez y Fernández, 1999).

Secuencia numérica como una serie en el sentido piagetiano

Hasta ahora se ha estudiado la secuencia numérica en el contexto de la acción de contar, es decir, el modelo de integración de habilidades, a partir de ahora se analizará teniendo en cuenta el otro modelo en cuestión: el lógico-piagetiano.

El estudio de la secuencia numérica en el marco piagetiano implica trabajar la estructura lógica de seriación subyacente a la secuencia numérica. En el cuadro siguiente (Figura 3), aparece de forma esquematizada el paso de la seriación a la sistematización de la secuencia, entendiendo las casillas que aparecen en las partes intermedias como capacidades seriales que el niño debe aplicar para alcanzarla. La expresión «sistematización de la secuencia» se traduce en terminología piagetiana como 'alcanzar el éxito operatorio de la serie', y el éxito operatorio, en el presente estudio, es el establecimiento de relaciones ordinales entre los términos de la secuencia numérica.

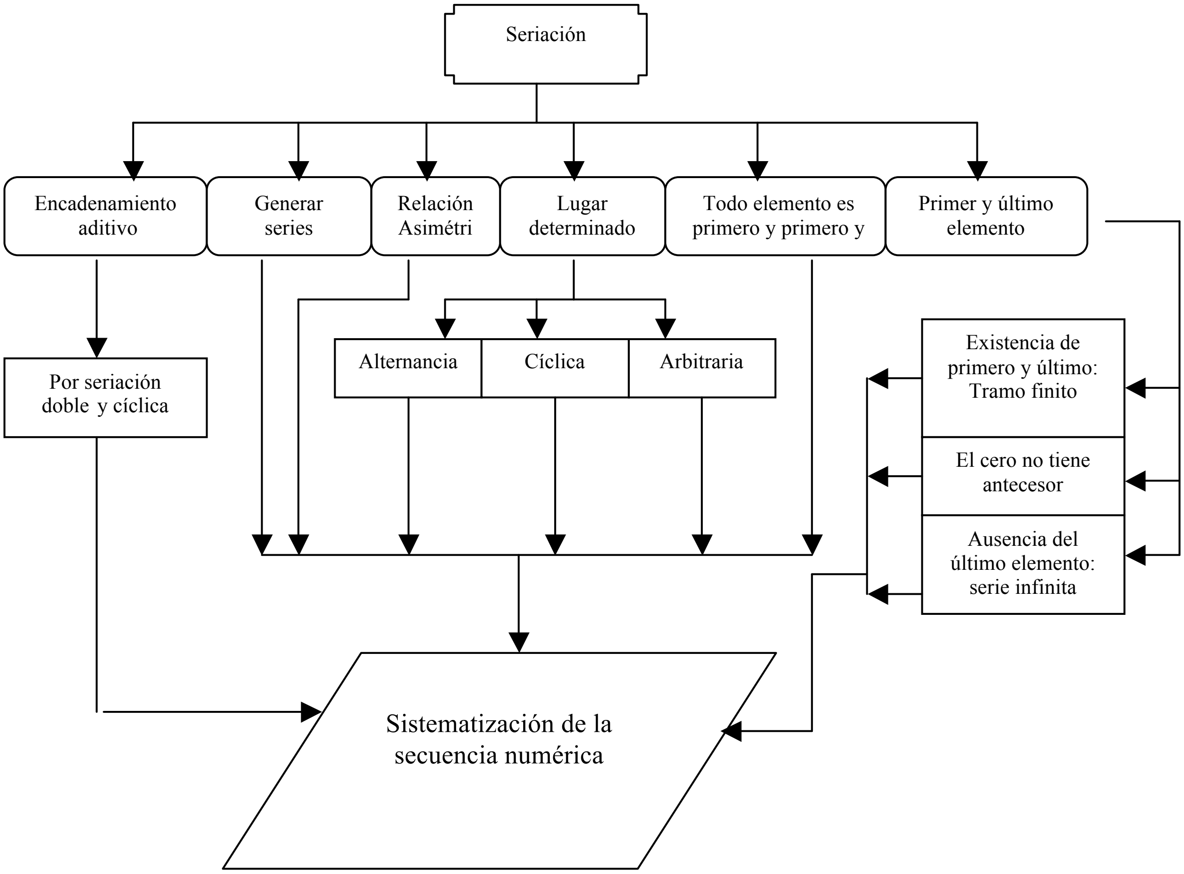

Figura 3. Sistematización de la secuencia numérica en el contexto de la seriación operatoria.

En los puntos sucesivos se tratarán las capacidades seriales presentadas. La transformación de la psicogénesis de la seriación al desarrollo de la secuencia numérica son reflexiones de la autora sobre la base de investigaciones empíricas cualitativas sobre relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica (Fernández y Ortiz 2008).

Relación asimétrica

Se alude a la comparación a través de la terminología ordinal: anterior, siguiente, etc., de dos términos cualesquiera. Se trata de advertir las diferencias entre dos elementos de la serie relativos a su posición ordinal.

Encadenamiento aditivo

Esta capacidad alude al proceso de construcción de una *sucesión de siguientes*. A un elemento le sigue otro elemento, y a este, otro, y así sucesivamente hasta completar toda la serie. El «encadenamiento aditivo» es un procedimiento recursivo a partir del cual se obtiene la «sucesión de siguientes» (Piaget e Inhelder, 1976).

La aplicación de estos esquemas (encadenamiento aditivo y sucesión de siguientes) pasa por el entendimiento de que el primer tramo de la secuencia (del 0 al 9) constituye un *ciclo* a partir del cual, y con una regla de combinación, se genera toda la serie de números naturales. Dicha regla conlleva, a su vez, la aplicación de la *seriación doble*, consistente en seriar mediante dos criterios, por ejemplo, ancho y alto, lo que conlleva una disposición de doble entrada. En el caso de la secuencia numérica con la seriación doble se llega a la tabla del 100 en la que cada fila representa una decena y cada columna representa las unidades (Fernández, 2010). Viendo de esta manera la secuencia numérica, se facilita el aprendizaje del cálculo mental tal y como sugieren Gálvez et al. (2011), por ejemplo, sumar 10 a un número es situarse en la tabla del 100 en la fila siguiente y en la misma columna.

Las actividades del encadenamiento aditivo plantean cuestiones como: continuar una serie dada, encadenar elementos, averiguar el siguiente de un número, etc. Para la planificación de dichas actividades hay que tener en cuenta la génesis del conocimiento y estudiar la evolución que presentan los niños ante tareas de seriación. Atendiendo a la psicogénesis de la seriación, se dan tres etapas de maduración hasta conseguir el éxito operatorio: (a) *ausencia de seriación*: los niños son incapaces de mantener el criterio de la serie y ante tareas como ensartar bolas siguiendo la alternancia rojo-azul, cambian el criterio fijándose en aspectos figurales; (b) *seriación por «tanteos»*: es la capacidad de seriar correctamente a través de tanteos empíricos; esta actuación conlleva realizar la serie con éxito, pero está hecha por ensayo y error, y son incapaces de anticipar un resultado; es una seriación intuitiva, el encadenamiento aditivo solo se comprende en función de la serie total percibida; (c) *seriación operatoria*: es donde aparece el éxito operatorio, el escolar es capaz de anticipar la serie y la realiza usando un método sistemático, llegando a expresar la generalización en problemas de sucesiones (Cañadas, Castro y Castro, 2012).

La evolución que sigue el encadenamiento aditivo pasa por una primera etapa de seriación arbitraria en la que solo se da una yuxtaposición de términos y carece de una ley de sucesión; le sigue la seriación intuitiva realizada por tanteos empíricos que no conlleva capacidad de anticipación, método sistemático, etc. y caracterizada porque mientras se perciben, las relaciones entre los términos se están dando, pero cuando se destruye dejan de existir en la mente del escolar; para terminar con el éxito operatorio de la tercera etapa en las que se dan las relaciones inversas «mayor que» y «menor que», lo cual implica la posibilidad de desarrollar la serie en los dos sentidos.

Llevando estas actuaciones a la serie numérica y partiendo de que el niño domina el tramo del uno al diez, la autora deduce que el escolar: (a) no consigue repetir la secuencia del uno al cien, por ejemplo, pero sí es capaz de reproducir pequeños tramos de la misma, (b) es capaz de contar del uno al cien pero con ayuda en el cambio de decenas, y (c) se da el éxito operatorio, conoce un método sistemático para repetir la serie numérica, sabe que cuando se «agotan» los números que empiezan por 1, es decir, se llega al 19, el siguiente es empezar por 2 y unir este a todos los del ciclo (así se sigue con: 20, 21… 29), y cuando este termina se debe continuar con el 3, originándose el 30, 31… 39, etc.

Por tanto, tal y como hemos indicado, la psicogénesis de la seriación se puede aplicar al desarrollo de la secuencia.

Primer y último elemento

Esta capacidad advierte que en algunas series finitas existe un primer y un último elemento. El «primero es anterior a todos» y el «último es posterior a todos». Para que una serie finita tenga primer y último elemento tiene que estar «bien ordenada», es decir, hay que disponer de una «buena ordenación» y «orden total» (Russell, 1982).

Las actividades que conllevan estos esquemas son del tipo siguiente: construcción de una serie dando el primer y último elemento; empezar la serie a partir de un término *a* y terminarla en *b*; decir n términos a partir de *a* (Fernández y Ortiz, 2008).

La asimilación de estos dos elementos característicos de cualquier serie finita con diagrama lineal manifiesta el inicio del éxito operatorio, puesto que identificar los elementos *a* y *b* como primero y último conlleva: (a) advertir las diferencias existentes entre cada uno de esos elementos con todos los demás; (b) usar los términos que describe una serie en sentido comparativo frente al uso de esos mismos términos en un sentido puramente de etiquetaje, y así indicar que *a* es el más pequeño de todos y que *b* es el más grande, o en un lenguaje ordinal decir que *a* es anterior a todos y que *b* es el posterior; (c) hacer uso de la serie comparativa en los dos sentidos, puesto que si un niño tiene que detenerse en el último elemento *b* debe reconocer el término *k* como anterior a este para saber que el posterior de *k* es el último, lo que implica hacer un uso simultáneo de los conceptos «anterior» y «posterior», desarrollando la serie en los dos sentidos.

Todo elemento es primero y último

Un término en una serie lineal es último elemento de todos los que le anteceden y primero de los que le suceden. Esta capacidad se infiere de las *series ordinales*[1], en las que interviene una relación de orden total; de todas ellas podemos decir que un elemento cualquiera es mayor que todos los anteriores y menor que todos los posteriores.

La identificación de cualquiera de estos términos supone el éxito operatorio en la realización de series, puesto que ello determina un método sistemático para la construcción de las mismas; consistente, este, en colocar en primer lugar el primer elemento, a continuación se coloca el primero de entre los restantes, etc. Luego, en cada paso, el elemento que se coloca es tratado simultáneamente como primero y último (Piaget e Inhelder, 1976).

Lugar determinado

Cada elemento ocupa un lugar determinado en la serie. Se alude a la capacidad de averiguar la posición que ocupaba un elemento dado, aplicando distintos esquemas seriales: (a) alternancia: un elemento determinado se encuentra entre dos elementos de la clase contraria; con ello se descubren algunas propiedades importantes como que cada número par está entre dos impares, del mismo modo que cada impar está entre dos pares; (b) cíclica: conociendo la posición de cada uno de los elementos que componen el ciclo se puede determinar el anterior y el siguiente de todos los demás; (c) arbitraria: se trata de averiguar el lugar que ocupa un término cualquiera y observar cómo se realiza la descripción de dicha posición (Piaget e Inhelder, 1976).

Generación de series

Se trata el proceso de generación de series aludiendo a criterios ordinales. Describe un proceso de generación de las series numéricas aditivas a partir de la secuencia de números naturales del siguiente modo:

1. Construcción de la serie S_1. Realizamos una correspondencia serial entre la secuencia numérica[2] (que llamaremos S) y la alternancia: sí-no-sí-no-sí-no-sí-no… Consideramos, ahora, la serie de la secuencia correspondiente a los «síes» y obtenemos: (S_1) 1-3-5-7-9…
2. Construcción de la serie S_2. En el segundo paso aplicamos el mismo método generativo que hemos usado en el primero. Así, a la serie S le aplicamos la correspondencia serial con esta otra: sí-no-no-sí-no-no-sí… y obtenemos S_2, que sería: 1-4-7-10…
3. Construcción de la serie S_3. Obtenemos S_3 a partir de la correspondencia serial con la serie: sí-no-no-no-sí-no-no-no-sí… entonces, S_3 es: 1-5-9… De esta forma, en el enésimo paso se obtiene la sucesión S_n a partir de la correspondencia serial: sí-(n-noes)-sí-(n-noes)-sí…

Con este proceso se ha creado un método de construcción de las series numéricas aditivas a partir de la secuencia numérica.

Si combinamos este apartado con algunos de los anteriores podemos obtener, por ejemplo, las tablas de multiplicar de esta forma:

[1] Llamamos series ordinales a las series cuyo criterio es un orden.
[2] Consideramos que S es la secuencia numérica que empieza en 1.

- ✓ Partimos de la secuencia de números naturales: 1, 2, 3, 4, 5…
- ✓ Contar dos lugares y con el dos como primer elemento: 2, 4, 6, 8…
- ✓ Contar tres lugares y con el tres como primer elemento: 3, 6, 9, 12…
- ✓ Contar cuatro lugares y con el cuatro como primer elemento: 4, 8, 12, 16…

Y así sucesivamente.

En resumen, todas las series numéricas aditivas pueden generarse a partir de la secuencia de números naturales usando un método de generación de carácter ordinal.

Discusión

Conclusiones y síntesis

Se han comparado dos modelos: modelo lógico piagetiano y modelo de integración de habilidades (procesamiento de la información) para conocer el desarrollo de la secuencia numérica. Estos modelos tratan sobre el desarrollo del número natural en el niño, y nosotros, en este trabajo, hemos analizado bajo el prisma de esos dos modelos el desarrollo de la secuencia numérica.

¿Qué diferencia hay entre secuencia numérica y número natural?

El conjunto de números naturales está formado por números que son sus elementos. Una característica importante de este conjunto es que está ordenado, que sus elementos se pueden poner en secuencia, uno detrás de otro, y esto hace que cada elemento del conjunto de números naturales lleve consigo dos acepciones: una por el lugar que ocupa en la serie, el aspecto ordinal del número; y la otra, por el significado que ese elemento tiene por sí mismo, el aspecto cardinal del número.

El primero origina el uso del número para contar y se formaliza, matemáticamente, mediante la inducción completa y los axiomas de Peano.

El segundo aspecto nos proporciona el uso del número para medir una colección de objetos discretos y se formaliza, matemáticamente, a través de la equipotencia de los conjuntos.

Dentro del contexto ordinal, la construcción más aceptada del sistema de números naturales es la Axiomática de Peano, basada en la inducción o recurrencia de la función «siguiente» y en la existencia del cero como elemento generador en esa ley de recurrencia.

Los axiomas de Peano abordan el aspecto ordinal del número natural, pretendiendo una secuenciación de los números. En esta construcción no es importante la definición de los términos numéricos, sino que lo que interesa verdaderamente es la «relación de siguiente» existente entre ellos. Desde este punto de vista aparece la construcción de la secuencia numérica desde los conceptos primarios de relaciones lógico-ordinales generadoras de series, ya que son estos los que están asociados a la función sucesor que se indica en el segundo axioma.

Definiremos la secuencia numérica como un tipo de serie que puede generarse a partir de relaciones lógicas ordinales. Estas definiciones están dadas a partir de la construcción que Bertrand Russell (1903) hace de las relaciones de orden, basadas a su vez en las relaciones asimétricas biunívocas definidas por Bolzano (1851), que conllevan como concepto primario lo que él mismo denomina como «inmediato posterior al lado de e inmediato anterior al lado de».

La aportación de este trabajo es analizar cómo se da mediante las relaciones lógicas ordinales el desarrollo del número en el niño mediante los dos modelos (piagetiano y procesamiento de la información), lo cual significa que nos hemos centrado en la secuencia numérica y hemos obviado el aspecto cardinal del número. Tanto es así que en el modelo piagetiano se ha considerado la estructura lógica de seriación sin aludir a la estructura lógica de clasificación ni a la conservación de cantidades discretas; y en el modelo de la acción de contar (procesamiento de la información) se ha trabajado el principio de orden estable con la adquisición y elaboración de la secuencia numérica, pero no hemos estudiado ni analizado el principio de cardinalidad (la última palabra del recuento es el cardinal de conjunto), ni el principio de abstracción (cualquier colección de objetos discretos es contable) ni el principio de orden irrelevante (el cardinal del conjunto es independiente de la forma de realizar el recuento). Tampoco se ha tratado el principio de correspondencia uno a uno (a todos y cada uno de los elementos del conjunto que se va a contar le corresponde uno y solo un término numérico), con la única intención de calcular el cardinal del conjunto.

El hecho de estudiar en profundidad el desarrollo del número en el niño mediante las relaciones lógicas ordinales, obviando todo aspecto de cantidad del número, es lo que hace que este trabajo sea inédito y original.

Las conclusiones son las siguientes:

- Desde el modelo piagetiano se puede analizar la estructura lógica de seriación subyacente a la secuencia numérica.
- Desde el procesamiento de la información, la secuencia numérica se analiza como componente del conteo, pero sin tener en cuenta las relaciones lógicas ordinales que existen entre sus términos. En este modelo, las investigaciones sobre la funcionalidad del conteo apuntan hacia el «operador cuantificador», comparando los números cardinales para posteriormente localizarlos en la secuencia.
- Las relaciones lógicas ordinales no han sido objeto específico de estudio ni en el modelo piagetiano ni en el modelo de integración de habilidades (procesamiento de la información), lo que representa que la investigación aquí realizada es totalmente inédita y original.
- Es posible determinar tareas específicas del número ordinal que reflejen las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica, sin tener que tratar estos términos como magnitudes.

Podemos destacar dos consecuencias importantes:

1. Los elementos básicos característicos de la estructura lógica de seriación de Piaget son aplicables a la secuencia numérica y, por tanto, podemos tenerla en cuenta en la didáctica del número natural.
2. Existen tareas exclusivamente ordinales para evaluar las relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica.

Y con todo ello hemos conseguido:

- Delimitar el aspecto ordinal en la transmisión escolar del número natural.
- Caracterizar las relaciones lógicas existentes entre los términos de la secuencia numérica mediante la estructura lógica de seriación subyacente a la misma.

Por último, cabe señalar que este trabajo plantea un reto a los maestros y maestras de educación infantil en el sentido siguiente: conseguir en sus escolares la integración de las habilidades y rutinas presentes en la acción de contar en estrategias que manifiesten algún tipo de relación lógica ordinal entre los términos numéricos (Fernández, 2012, 2013).

En Fernández y Ortiz (2008) se analiza la evolución de las relaciones lógico-ordinales en un grupo reducido de niños seleccionados al azar, donde se proporcionan las siguientes orientaciones a los maestros, teniendo en cuenta para cada edad las competencias o habilidades a conseguir en función de las relaciones lógicas ordinales:

Clase de 3 años. Los niños de 3 años en general no tienen en cuenta el dato, por ello la competencia o habilidad lógica ordinal sería *localizar posiciones ordinales*. Una actuación concreta en el aula, atendiendo a la competencia dada, sería: «Se presentan filas de objetos. El niño tiene que averiguar el primero, el quinto, etc. Recíprocamente, se dan unas posiciones ordinales y el niño tiene que distinguir a qué objeto de la fila corresponden».

Clase de 4 años. Estos niños tienen en cuenta el dato, por lo que pueden desarrollar la competencia de «localizar posiciones lógicas ordinales».

Clase de 5 años. La característica fundamental en esta clase es que ya no dependemos de objetos tangibles. No se presentan filas de objetos, sino que se manejan con la secuencia numérica, ya que los niños han conseguido el éxito operatorio en las relaciones lógicas ordinales que hay entre los términos de la secuencia numérica, lo cual permite realizar estas actuaciones en el aula:

- Localizar el siguiente y el anterior de cualquier número entre 1 y 10.
- Contar a partir de un término.
- Contar a partir de un término hasta llegar a otro.
- Contar a partir de un término *a* n términos.

En definitiva, nuestra investigación cambia las competencias básicas en el aspecto de conteo. Así, la habilidad «recitado memorístico de la secuencia numérica» se cambia por las competencias en función de las relaciones lógico-ordinales que se dan entre los términos numéricos: «si en *a* ocurre tal cosa, ¿qué ocurre en *b*?». Algunas de estas competencias serían:

- Determinar todos los posteriores de *a* hasta llegar a *b* (primer y último elemento).
- Determinar todos y cada uno de los términos de la secuencia del tramo *a*, *b* (entre).
- Tener un elemento generador de la serie sobre el cual razonar inductivamente (primer elemento).
- Determinar los «siguientes» mediante el «siguiente inmediato», y recíprocamente.
- Determinar el «siguiente inmediato» conociendo los siguientes.

El dominio de la secuencia numérica es significativo desde el punto de vista que concierne a su sistematización a partir de los dos modelos estudiados.

El artículo original fue recibido el 23 de abril de 2014
El artículo revisado fue recibido el 17 de marzo de 2015
El artículo fue aceptado el 8 de mayo de 2015

Referencias

Bermejo, V. y Bermejo, M. P. (2004). Aprendiendo a contar. En M. P. Bermejo (Coord.), *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor* (pp. 15-32). Madrid: CCS.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1991). *Aprendiendo a contar. Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos.* Madrid: Centro de Investigación y Documentación Educativa.

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien des Unendlichen*. Lepizig: C.H. Reclam.

Brainerd, C. J., & Gordon, L. L. (1994). Development of verbatim and gist memory for numbers. *Developmental Psychology, 30*(2), 163-77.

Brannon, E. M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition, 83*, 223-240.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,15*(3), 561-574.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Uno, 54*, 55-57.

DeSoto, M. C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, *88*(2), 121-151.

Fernández, C. (2010). Análisis epistemológico de la secuencia numérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *13*, 59-88.

Fernández, C. (2012). Proyecto para la evaluación de la capacidad de comprender-aprender matemáticas. En F. Valdivia (Ed.), *Evaluación de los procesos de enseñanza-aprendizaje en el ámbito universitario* (pp. 157-168). Málaga: SPICUM.

Fernández, C. (2013). Contribuciones para la mejora de la educación matemática en los niños y niñas de 3 a 6 años de Andalucía. En M. C. Moreno, M. M. Gallego y C. I. Gallego (Eds.), *Retos educativos de la cultura andaluza en una sociedad global* (pp. 543-558). Málaga: HUM-689.

Fernández, C. y Ortiz, A. (2008). La evolución del pensamiento ordinal en escolares de 3 a 6 años. *Infancia y Aprendizaje, 31*(1), 107-130. doi: 10.1174/021037008783487066

Fuson, K. C. (2000). *Pre-k to grade 2 goals and standards: Achieving 21st century mastery for all*. Trabajo presentado en la Conference on Standards for Preschool and Kindergarten Mathematics Education, State University of New York at Buffalo, EE.UU. Recuperado de http://www.gse.buffalo.edu/org/conference

Fuson, K., & Hall, J. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 49-107). Nueva York: Academic Press.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena Lorca, A., Tanter, E., Flores, X., Luci, X., Montoya, S. y Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *RELIME, 14*(1), 9-40.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child´s understanding of number.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Klhar, D., & Wallace, J. G. (1973). The role of quantification operators in the development of conservation. *Cognitive Psychology*, 4, 301-327.

Mix, K. S., Sandhofer, C. M., Moore, J. A., & Russell, C. (2012). Acquisition of the cardinal word principle: The role of input. *Early Childhood Research Quarterly, 27*(2), 274-283. doi: 10.1016/j.ecresq.2011.10.003

Muldoon, K., Lewis, C., & Towse, J. (2005). Because it's there! Why some children count, rather than infer numerical relationships. *Cognitive Development, 20*(3), 472-20.

Piaget. J. (1981). *La toma de conciencia*. Madrid: Morata.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales: clasificaciones y seriaciones.* Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1964). *La genèse du nombre chez l'enfant.* Neuchatel: Editions Delachaucx et Niestlé.

Russell, B. (1982). *Los principios de la matemática*. Madrid: Espasa Calpe. (Trabajo original publicado en 1903).

Sánchez, A. B. (2013). Aprender a contar según el De Computo de Rabano Mauro. *Educación XX1*, *16*(2), 39-62. doi: 10.5944/educxx1.16.2.2632

Sánchez, M. D. y Fernández, C. (1999). *Estudio del cardinal y el ordinal para la enseñanza y aprendizaje en educación infantil*. Trabajo presentado en el II congreso Mundial de Educación Infantil y Formación de Formadores, Diputación de Málaga, España.

Sarnecka, B. W., & Gelman, S. A (2004). Six does not just mean a lot: Preschoolers see number words as specific. *Cognition*, *92*, 329-352. doi: 10.1016/j.cognition.2003.10.001

Schaeffer, B., Eggleston, V. H., & Scott, J. L. (1974). Number development in young children. *Cognitive Psychology*, 6, 357-379.

Serrano, J. M. (2008). Acerca de la naturaleza del conocimiento matemático. *Anales de Psicología, 24*(2), 169-179.

Slusser, E. B., & Sarnecka, B. W. (2011). Find the picture of eight turtles: A link between children's counting and their knowledge of number word semantics. *Journal of Experimental Child Psychology, 110*(1), 38-51.

Song, M. J., & Ginsburg, H. P. (1988). The effect of the Korean number system on young children's counting: A natural experiment in numerical bilingualism. *International Journal of Psychology, 23*, 319-332.

Wagner, S., & Walters, J. A. (1982). A longitudinal analysis of early number concepts: From numbers to number. En G. Forman (Ed.), *Action and thought* (pp. 137-161). Nueva York: Academic Press.