PEL
Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana
2017, 54(2), 1-13

Pontificia Universidad
Católica de Chile
Facultad de Educación

Análisis de la argumentación matemática de estudiantes de primer año

Analysis of mathematical argumentation of first-year students

Kathrin Nagel, Stephanie Schyma, Andres Cardona, and Kristina Reiss

Technische Universität München

Resumen

Promover los estudiantes al inicio de sus estudios universitarios es un aspecto importante tanto en Chile como en el contexto internacional. Sin embargo, altos índices de abandono muestran que la transición educación media-educación superior es difícil para muchos alumnos, especialmente en matemáticas. La argumentación matemática es una actividad fundamental y compleja, la cual podría ser una de las principales razones de las dificultades que presentan los estudiantes en esta materia durante el proceso de transición. Este estudio analiza la calidad de las argumentaciones, los esquemas de prueba y el formalismo utilizado en las respuestas de N = 86 estudiantes de primer año, con el fin de entender mejor donde se ubica el problema. Los resultados muestran que la calidad de la argumentación, el uso de argumentos apropiados y los formalismos matemáticos tienen alta variación en las dos tareas reportadas: 10/% de los estudiantes probaron el primer teorema geométrico asignado y 65% probaron correctamente el segundo. Esto indica que los estudiantes están en una fase de desarrollo de sus habilidades argumentativas. Consecuentemente, el proceso de probar y construir argumentos analíticos debe ser explícitamente discutido en la Universidad, así los estudiantes podrán mejorar sus habilidades para el razonamiento matemático.

Palanras clave: higher education, secondary-tertiary transition, mathematical argumentation

Correspondencia a:
Kathrin Nagel
Arcisstr. 21
80333 München
Germany
kathrin.nagel@tum.de

ISSN:0719-0409 DDI:203.262, Santiago, Chile
doi: 10.7764/PEL.55.1.2018.10

Abstract

Fostering students at the beginning of university studies is an important issue not only in the international context but also in Chile. However, high dropout rates show that the transition from secondary school to university in mathematics is supposed to be difficult for many students. Mathematical argumentation is a core activity in mathematics and also very complex. Therefore it could be one of the main reasons for the difficulty at the secondary-tertiary transition in mathematics. This study analyzes the quality of students' argumentations, the proof scheme, and the formalism in students' answers of N = 86 first-year students in mathematics in order to better understand where the problems are in detail. The results show that the quality of argumentation, the use of appropriate arguments, and mathematical formalism highly varies in the two reported tasks: on the one side, 10% of students are able to prove one of the given geometrical theorems, on the other, 65% proved the other theorem correctly. This indicates that students are in a phase of developing their argumentative abilities. Consequently, the process of proving and constructing analytical arguments should be explicitly discussed in university lectures, so that students can improve their abilities for mathematical reasoning.

Keywords: higher education, secondary-tertiary transition, mathematical argumentation

La situación en Chile

El acceso a la educación superior en Chile ha mostrado una importante mejoría durante los últimos años. De acuerdo al último informe del Ministerio de Educación (2016), el número total de estudiantes de pregrado subió un 57% entre 2007 y 2016. Este aumento define un nuevo desafío con respecto a la transición desde la educación secundaria a la terciaria (Fonseca, 2011). La transición se ve como una dificultad derivada de múltiples causas, la principal de las cuales es la confianza en sí mismos de los estudiantes, quienes creen no estar preparados para la educación superior. Otras causas se asocian a la falta de estrategias por parte de las universidades para enfrentar el desafío de la diversidad social, cultural y cognitiva de los nuevos estudiantes (Herrera, 2011).

Según Herrera, González, Poblete y Carrasco (2011), dicho déficit refleja una brecha creada por el sistema chileno entre las escuelas y las universidades, siendo crucial apoyar la transición para asegurar la continuidad de los estudiantes. En consecuencia, González (2011) apunta que es importante investigar más en profundidad este proceso de transición para hacer sugerencias que permitan que las nuevas políticas públicas ayuden a los jóvenes a alcanzar sus metas académicas en niveles educativos superiores.

La brecha entre las matemáticas escolares y universitarias

De acuerdo al Centro de Medición de la Pontificia Universidad Católica de Chile (MIDE UC), los estudiantes de educación secundaria muestran un alto desempeño en el análisis de problemas y en la comprensión conceptual, particularmente en cuanto a las operaciones algebraicas, las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos, los teoremas de congruencia y la proporcionalidad (Rodríguez et al., 2013). Sin embargo, el razonamiento matemático necesario para realizar demostraciones geométricas es un tema que se enseña poco en las aulas chilenas (Ministerio de Educación, 2015). Además, la ausencia tanto de argumentación formal como de razonamiento deductivo en las clases escolares de matemáticas ha llamado la atención de numerosos investigadores (Varas, Cubillos y Jiménez, 2008).

Luego de estudiar los programas preparatorios desarrollados en distintas universidades, Gutiérrez et al. (2010) establecieron que existe una enorme distancia entre las metas de aprendizaje en la educación secundaria y lo que los estudiantes efectivamente saben al momento de inscribirse en la educación terciaria. Con respecto a la competencia matemática, Gutiérrez et al. (2010) sostienen que el nivel de las matemáticas en la educación escolar difiere del de las universidades no sólo en cuanto a los temas tratados, sino también porque en la educación superior se requiere una comprensión más profunda de la disciplina. Aprender matemáticas en la educación secundaria principalmente conlleva procesos estandarizados, estrategias de resolución de problemas y generalización de conceptos matemáticos; sin embargo, se espera que los estudiantes en niveles educativos superiores sean capaces de manipular objetos nuevos con un mejor nivel de comprensión conceptual y abstracta (Gutiérrez et al., 2010).

Asimismo, de acuerdo a Varas et al. (2008), el bajo nivel de conciencia observado en Chile con respecto al valor del razonamiento matemático debería abordarse tanto a nivel curricular como dentro del desarrollo profesional de los docentes. Los profesores de educación primaria también muestran deficiencias similares con respecto al razonamiento matemático y la demostración de teoremas, ya que hacen hincapié en “los cálculos y no en el análisis durante las clases de matemáticas” (Varas, 2008, p.53). Como sostienen Radovic y Preiss (2010), el patrón de la instrucción en Chile se centra en preguntas relativas al control de las actividades de aula más que en mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos. Adicionalmente, la mayoría de las preguntas suponen un bajo desafío cognitivo y reducen las oportunidades que tienen los estudiantes para construir conocimiento durante su aprendizaje (Radovic y Preiss, 2010).

En 2006, el 37% de los chilenos inscritos en carreras científicas o matemáticas interrumpían sus estudios universitarios o cambiaban de programa durante sus primeros dos años en la universidad (Acuña, Makovec y Mizala, 2010). Así, la evidencia indica que existen problemas en la transición desde las matemáticas escolares a las universitarias (Gallardo, Lorca, Morrás y Vergara, 2014; Pérez, Castellanos, Díaz, González-Pienda y Núñez, 2013).

Medidas para reducir la brecha

Para resolver este problema, el Ministerio de Educación ha sugerido el uso de material pedagógico enfocado en que los estudiantes comprendan que, en el campo matemático, todas las proposiciones pueden y deben ser demostradas. El objetivo principal de este material es desarrollar el pensamiento analítico y deductivo antes de que los estudiantes comiencen a demostrar teoremas. Así, los estudiantes primero deben comprender la importancia de las demostraciones para luego centrarse en los conceptos de hipótesis, tesis y prueba matemática (Ministerio de Educación, 2015). Los “Guiones didácticos y guías para la y el estudiante”, creados por el Ministerio de Educación de Chile, entregan ejemplos de demostraciones usando tanto lenguaje narrativo como notación matemática. Se recomienda que los profesores los empleen “de acuerdo a las necesidades de los estudiantes” (p.58).

Asimismo, recientemente el Ministerio de Educación ha generado variadas estrategias para crear programas dirigidos a apoyar a los estudiantes de primer año de educación superior. Por ejemplo, el programa preparatorio “Introducción a la matemática universitaria” (PIMU) constituye una de las actividades más importantes desarrolladas en el nivel terciario (Portales, 2015). El curso se desarrolla antes de que se inicien las clases en la universidad y su objetivo es ayudar a los estudiantes a aprobar los cursos matemáticos de primer año.

Buscando determinar la efectividad del PIMU, Portales (2015) analizó el rendimiento de los estudiantes en los cursos matemáticos ofrecidos durante el primer año. Este autor observó que el programa tenía un impacto débil en los estudiantes con bajo rendimiento en la prueba de diagnóstico, un aporte positivo en grupos de rendimiento medio y una contribución baja en grupos de alto rendimiento. El estudio también identificó que los estudiantes que se inscribían en el PIMU diferían en cuanto a conocimiento matemático y que el programa no bastaba para remediar todas las deficiencias que traían desde la escuela (Portales, 2015).

Argumentación matemática

Durante la transición entre educación secundaria y terciaria, los estudiantes deben superar numerosas barreras para sobrellevar con éxito sus primeros contactos con las matemáticas a nivel universitario. Puesto que la argumentación matemática es una competencia clave [en las matemáticas] (CCSSI, 2010; Ministerio de Educación, 2011), se hará énfasis en el proceso de argumentación matemática como un aspecto importante de fomentar durante la educación escolar y universitaria. En este artículo, el término *argumentación matemática* se refiere a la demostración de teoremas matemáticos. Sin embargo, algunos estudios analizan la argumentación en el aula centrándose en el diálogo entre los estudiantes o bien entre los estudiantes y el docente (por ejemplo, Pedemonte, 2007; Solar, Giménez y Piquet, 2012; Solar y Deulofeu, 2014). Por su parte, este campo de investigación se centra en la estructura de los argumentos y se basa principalmente en el modelo argumentativo de Toulmin (2003).

Si bien estudios realizados en distintos países han examinado la argumentación matemática de los estudiantes (por ejemplo, Heinze, Cheng, Ufer, Lin y Reiss, 2008; Heinze y Reiss, 2007; Reiss, Heinze, Renkl y Groß, 2006; Healy y Hoyles, 2000), sólo unos pocos han explorado este tema en el nivel terciario. La argumentación matemática es esencial debido al relevante papel que tiene en el desarrollo de teorías matemáticas. Por tanto, es un elemento central de las matemáticas académicas y tiene una enorme importancia en los estudios matemáticos universitarios. La estructura típica de una teoría matemática es definición - teorema - demostración. Esta es también la estructura típica de las clases de matemáticas en la universidad, lo que refuerza más aún la importancia de las demostraciones y del acto de demostrar. Las demostraciones no son únicamente una parte fundamental de las matemáticas, sino que también permiten lograr una mejor comprensión de los contenidos matemáticos (Hanna, 1995, 1997; Hanna y de Villiers, 2008). Éstas explican por qué los teoremas son verdaderos y muestran relaciones entre conceptos matemáticos. Boero (1999) describe el procedimiento que usualmente siguen los expertos en matemáticas para desarrollar demostraciones formales por medio de un modelo de seis pasos:

> I) producción de una conjetura […];
> II) formulación de la proposición de acuerdo a convenciones textuales compartidas […];
> III) exploración del contenido de la conjetura (y de los límites de su validez); […] desarrollo de los vínculos entre las hipótesis y las tesis; identificación de argumentos apropiados para la validación […];
> IV) selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes para generar una cadena deductiva […];
> V) organización de los argumentos encadenados para conformar una prueba aceptable de acuerdo a los estándares matemáticos actuales […];
> VI) aproximación a una prueba formal […]
> (Boero, 1999, p. 2)

El proceso de demostración comienza con una conjetura que debe ser probada. Luego, los expertos formulan las posibles hipótesis y reflexionan sobre el teorema y su significado. Asimismo, exploran el problema matemático y lo vinculan con conceptos relacionados dentro del mismo contexto matemático. También recogen argumentos plausibles para apoyar la demostración. En el cuarto paso, los expertos seleccionan argumentos relevantes y los ordenan deductivamente. Finalmente, se aproximan a una prueba formal.

Brunner (2014) describe cómo puede caracterizarse el proceso de demostración en la educación secundaria. Esta autora presenta un modelo del desarrollo de una demostración formal. En el nivel más básico se encuentra la prueba experimental, la que se relaciona con ejemplos concretos. Al seleccionar argumentos y generalizaciones apropiados (inicialmente desde una perspectiva visual), los estudiantes logran desarrollar una demostración formal basada en la deducción.

Ambos modelos demuestran que una prueba formal es el resultado de un proceso compuesto por múltiples pasos. Sin embargo, en las clases universitarias, las pruebas matemáticas suelen presentarse en su versión final, por lo que el proceso de demostración no siempre es evidente para los estudiantes. El hecho de que los estudiantes normalmente no vean cómo se crean las demostraciones podría ser una causa de sus problemas en el aprendizaje y la práctica de la argumentación. La argumentación matemática no solamente plantea un desafío para los estudiantes, dado que éstos no suelen presenciar el proceso de demostración, sino que también constituye una de las actividades más complejas dentro de las matemáticas. Para desarrollar demostraciones exitosas, los estudiantes necesitan habilidades que les permitan resolver problemas matemáticos avanzados. Además, deben conocer estrategias sofisticadas y la estructura de las demostraciones (Reiss y Ufer, 2009). Por ejemplo, si a un alumno se le pide demostrar que los ángulos internos de un triángulo suman 180°, no sólo debe conocer y entender el contenido sino que además debe estar consciente de que necesita argumentos ordenados de forma deductiva. Más aún, necesita habilidades generales de resolución de problemas que le permitan desarrollar una solución apropiada.

En consecuencia, muchos estudiantes de primer año no saben cómo comenzar una demostración matemática (Moore, 1994). Los resultados de otros estudios con alumnos universitarios también indican que la calidad de sus argumentaciones es bastante baja (Nagel y Reiss, 2016). Esto explica por qué la argumentación matemática es una de las actividades matemáticas más desafiantes al comienzo de la educación universitaria (Engelbrecht, 2010).

Modelos de demostración

La posible mala calidad de las demostraciones de los estudiantes no es el único problema: además, los argumentos que emplean podrían no ser adecuados para las matemáticas a nivel universitario. Harel y Sowder (1998), en su análisis de los argumentos utilizados por un grupo de estudiantes al comienzo de su paso por la universidad, identifican tres modelos de razonamiento principales:

- Convicción externa
- Argumentos empíricos
- Argumentos analíticos

Los estudiantes emplean argumentos externos cuando están seguros de que un teorema es verdadero pero son incapaces de entregar un argumento matemático que lo demuestre. En lugar de ello, hacen referencia a autoridades externas, como por ejemplo libros o profesores. Los argumentos empíricos se basan principalmente en ejemplos y son de carácter inductivo. Los argumentos analíticos se basan en deducciones lógicas y representan la forma matemática correcta de demostrar un teorema.

Asimismo, Recio y Godino (2001) estudiaron los tipos de argumentos empleados por los estudiantes universitarios. Estos autores relacionan los distintos tipos de argumentos con los contextos “vida cotidiana”, “ciencias experimentales”, “matemática profesional” y “lógica y fundamentos de las matemáticas” (Recio y Godino, 2001, p. 83). Se identificaron cuatro tipos principales de argumentos (Recio y Godino, 2001, p. 97):

- Modelos personales de argumentación explicativa
- Modelos de demostración empírico-inductivos
- Modelos deductivos informales
- Modelos de demostración deductivos formales

Una comparación entre el modelo de Harel y Sowder (1998) y el de Recio y Godino (2001) muestra que ambos se enfocan en diferenciar la argumentación inductiva de la deductiva. Asimismo, un estudio exploratorio realizado por Martin y Harel (1989) con estudiantes universitarios de primer año también identificó estos dos modelos generales.

Los estudiantes en los niveles secundario y terciario no suelen usar argumentos deductivos en sus demostraciones. Estudios realizados con estudiantes de educación secundaria muestran que éstos tienden a emplear argumentos empíricos (por ejemplo, Heinze y Reiss, 2007; Healy y Hoyles, 2000). Incluso a nivel universitario, los estudiantes muchas veces usan argumentos empíricos para demostrar teoremas matemáticos (Knuth, 2002; Martin y Harel, 1989). Sin embargo, los resultados de otro estudio indican que la mayoría de los alumnos de primer año de universidad razonan analíticamente (Nagel y Reiss, 2016).

El formalismo en las matemáticas

En la universidad, el contenido matemático se vuelve más complejo que en la escuela y además se presenta más formalmente. Esta situación podría remediarse mediante una introducción al lenguaje matemático formal, esencial para que los estudiantes puedan comprender las matemáticas académicas. En el primer año de universidad, los estudiantes aún no están acostumbrados al lenguaje formal, lo que puede causar problemas en su aprendizaje y comprensión del contenido matemático. Si el contenido matemático se presenta de manera formal, no es fácil generar las visualizaciones ni los ejemplos apropiados para comprender los conceptos matemáticos (Tall y Vinner, 1981).

Estudios realizados con escolares muestran que éstos tienen problemas para escribir sus respuestas en un lenguaje matemático adecuado (Hoyles, Newman y Noss, 2001; Fischer, Heinze y Wagner, 2009). En los primeros años de universidad, el contenido presentado formalmente puede aumentar las dificultades que enfrentan los alumnos para resolver problemas que requieren argumentación matemática. Por ejemplo, Lakatos (1979) criticó la importancia que se le da al formalismo matemático porque éste no ayuda al desarrollo de teorías matemáticas. Este autor sostiene que la lógica debiera ser el punto central. Estudios realizados con escolares demuestran que los alumnos tienden a considerar que las demostraciones formales son correctas, en desmedro de las no formales (Wittmann y Müller, 1988). Esto muestra que el formalismo estricto tiende a enfocarse en los aspectos formales de las demostraciones más que en su contenido.

Se necesita un instrumento especial para analizar la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes de primer año. Puesto que la argumentación matemática requiere de un conjunto de habilidades, el instrumento debe centrarse en algunos aspectos importantes. Uno de ellos debería ser la calidad de las argumentaciones de los estudiantes. Más aún, se debe examinar qué tipo de argumentos están utilizando los estudiantes para así comprender mejor cuáles son sus dificultades relativas al razonamiento matemático. En tercer lugar, el instrumento debe medir si los estudiantes son capaces de usar lenguaje matemático al realizar demostraciones.

Preguntas de investigación

Para analizar la argumentación matemática de los estudiantes universitarios de primer año, la primera pregunta de investigación es:

1. ¿Cuál es la frecuencia relativa de las argumentaciones correctas?

Dado que múltiples investigaciones con estudiantes secundarios y con universitarios de primer año muestran que la calidad de la argumentación matemática es bastante baja (Nagel y Reiss, 2016; Reiss et al., 2006; Heinze y Reiss, 2007; Knuth, 2002; Healy y Hoyles, 2000; Martin y Harel, 1989), suponemos que los estudiantes tienen problemas para razonar matemáticamente y que la calidad de su argumentación es baja.

La segunda pregunta de investigación se refiere al modelo de demostración empleado por los estudiantes:

2. ¿Los estudiantes usan argumentos empíricos en sus demostraciones?

Algunos estudios con estudiantes secundarios (por ejemplo, Reiss et al., 2006; Heinze y Reiss, 2007; Healy y Hoyles, 2000) han mostrado que éstos emplean argumentos empíricos basados en ejemplos. Sin embargo, una investigación con estudiantes de nivel terciario mostró que tienden a razonar analíticamente (Nagel y Reiss, 2016). Puesto que los resultados empíricos no siguen un patrón definido, suponemos que los estudiantes usan argumentos empíricos o analíticos.

La tercera pregunta de investigación se refiere al uso de lenguaje matemático formal cuando se demuestra un teorema:

3. ¿Los estudiantes usan lenguaje matemático formal?

Investigaciones realizadas por Hoyles et al. (2001) o Fischer, Heinze y Wagner (2009) demuestran que los estudiantes tienen problemas para expresar sus respuestas de un modo matemático formal. Por esta razón, suponemos que los estudiantes expresan sus respuestas no formalmente sino de modo narrativo (es decir, con palabras).

Método

El instrumento mide tres aspectos: la calidad de la argumentación, el tipo de argumentación utilizada y el uso de lenguaje matemático formal. Para obtener información detallada sobre el proceso de demostración que siguen los estudiantes, creamos tres preguntas abiertas que ilustran su proceso de razonamiento y el desarrollo de su argumentación más claramente que los ítems de opción múltiple. Otros investigadores que han analizado la argumentación matemática también han empleado preguntas abiertas (por ejemplo, Nagel y Reiss, 2016; Reiss et al., 2006).

Las tareas se refieren a contenidos geométricos que forman parte del currículo escolar (Common Core State Standards Initiative, 2010; Ministerio de Educación, 2011) y se consideran esenciales dentro de la geometría en las escuelas. De este modo, logramos separar la capacidad de razonamiento matemático del conocimiento conceptual. Si los estudiantes no logran demostrar correctamente uno de los teoremas presentados, podemos suponer que al menos conocían el contenido matemático y que su problema se limita al desarrollo de argumentos matemáticos. Otra razón para seleccionar contenidos geométricos es que permiten realizar soluciones gráficas que revelan el proceso de demostración más claramente que, por ejemplo, las transformaciones algebraicas de términos matemáticos.

Ítems

El instrumento incluye tres teoremas que los estudiantes deben demostrar. Tienen 30 minutos para completar la prueba. En la primera tarea, a los participantes se les pide demostrar que los tres bisectores de un triángulo se intersecan. En la segunda, deben demostrar que el teorema de Tales es verdadero. El la tercera, se les pide demostrar el teorema de Pitágoras. Este artículo solamente se refiere a los resultados de las primeras dos tareas.

Para resolver la primera tarea, en la que se pide demostrar que los tres bisectores de un triángulo se intersecan, es necesario saber que todos los puntos de los bisectores están a igual distancia de los dos vértices de cada lado. Más aún, puede argumentarse que la intersección de dos bisectores es equidistante de los tres vértices del triángulo. Finalmente, teniendo en cuenta la definición del bisector un lado de un triángulo, el tercer bisector debe pasar a través de la intersección.

En la segunda tarea, los participantes deben probar el teorema de Tales. La tarea requiere un conocimiento sobre ángulos suficiente para mostrar que el ángulo en el vértice C del triángulo ABC mide 90°. Como primer paso, el triángulo debe dividirse en dos triángulos isósceles con ángulos basales iguales. Luego, considerando que la suma de todos los ángulos [internos] de un triángulo es 180°, puede decirse que el ángulo del vértice C mide 90°.

Evaluación del instrumento

También analizamos los criterios de calidad del instrumento de medición. Puede decirse que un test es objetivo si sus resultados no son afectados por influencias externas (por ejemplo, Sedlmeier y Renkewitz, 2013). El test se llevó a cabo en dos grupos comparables. Todos los participantes recibieron las mismas instrucciones y rindieron el test al mismo tiempo. Además, el test fue analizado por dos observadores que lograron un buen nivel de acuerdo en sus codificaciones. Por lo tanto, podemos suponer que el instrumento es objetivo.

La confiabilidad de los instrumentos generalmente se examina con el coeficiente alfa de Cronbach, el cual analiza la consistencia interna de los ítems (Cronbach, 1951). Como hasta el momento sólo se han analizado dos de tres ítems, la escala del coeficiente también incluye sólo dos ítems. Así, podemos suponer que el coeficiente es bastante bajo, pues depende del número de ítems. Al calcular el coeficiente alfa de Cronbach, se obtuvo un valor de $r = 0.291$. Debido al bajo número de ítems, podemos interpretar este valor como satisfactorio.

En tercer lugar, controlamos la validez del contenido del test consultando a expertos en matemáticas y en pedagogía de las matemáticas, quienes seleccionaron el contenido de los ítems cuidadosamente.

Codificación

Las tareas fueron evaluadas mediante un sistema de codificación que coincide con los modelos de demostración de Harel y Sowder (1998). Éste contiene las variables “calidad de argumentación”, “modelo de demostración” y “tipo de respuesta” (ver Tabla 1).

Tabla 1
Variables de codificación

Calidad de la argumentación	Otro – ningún enfoque – enfoque / idea – sub-pasos de una demostración – demostración correcta
Modelos de demostración	Sin argumentos – argumentos externos – argumentos empíricos – argumentos analíticos
Formalismo	Sin argumentos – respuesta narrativa – respuesta narrativa y formal – respuesta formal

Las dos tareas fueron codificadas por dos observadores independientes para así controlar la confiabilidad interjueces y la objetividad del instrumento. La confiabilidad interjueces se calculó con el coeficiente kappa de Cohen y se presenta en la Tabla 2. Los coeficientes indican un alto grado de acuerdo entre los dos observadores (Cohen, 1960).

Tabla 2
Confiabilidad interjueces de ambas tareas

Variables de codificación	Kappa de Cohen	
	Ítem: Intersección de los tres bisectores de los lados de un triángulo	Ítem: Teorema de Tales
Calidad de la argumentación	0.76	1.0
Modelos de demostración	0.74	1.0
Formalismo	0.73	0.79

Recolección de datos

La muestra se compone de N = 86 estudiantes de primer año de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile. Los participantes estudian matemáticas, pedagogía en matemáticas, física o pedagogía en física. Asisten a las mismas clases de matemáticas. El estudio transversal se llevó a cabo en el primer semestre, durante una clase de ejercicios matemáticos.

Resultados

La Tabla 3 muestra la frecuencia relativa de todas las variables en ambas tareas.

Tabla 3
Frecuencia relativa de todas las variables en ambas tareas

Variables	niveles	Ítem: Intersección de los tres bisectores de los lados de un triángulo	Ítem: Teorema de Tales
Calidad de la argumentación	otra	0.37	0.12
	Ningún enfoque	0.33	0.07
	Enfoque / ideas	0.12	0.02
	Sub-pasos de una demostración	0.09	0.14
	Demostración correcta	0.10	0.65
Modelos de demostración	Sin argumentos	0.65	0.20
	Argumentos externos	0.14	0.02
	Argumentos empíricos	0.02	0.04
	Argumentos analíticos	0.19	0.74
Formalismo	Sin argumentos	0.56	0.15
	Respuesta narrativa	0.22	0.16
	Respuesta narrativa y formal	0.20	0.58
	Respuesta formal	0.02	0.11

Más de un tercio de las respuestas de los estudiantes (37%) se codificó en la categoría “otra”. Estos participantes confunden el bisector del lado de un triángulo con la altura del triángulo o sus medianas. La calidad de la argumentación es baja en el ítem en el que se debe demostrar que los tres bisectores de los lados de un triángulo se intersecan. El 33% de los participantes no entrega argumentos para explicar matemáticamente el teorema. Sin embargo, sólo el 12% de los estudiantes no entrega ningún argumento para demostrar el teorema de Tales. La mayoría de los participantes (65%) prueba correctamente el teorema de Tales, mientras que sólo un 10% resuelve la primera tarea de forma adecuada. Asimismo, el 14% de los estudiantes genera sub-pasos de la demostración del teorema de Tales.

Con respecto al modelo de demostración utilizado, los resultados indican que muchos estudiantes no razonan con argumentos: en la tarea que pide demostrar la intersección de los bisectores, el 65% de ellos no emplea argumentos matemáticos. En la segunda tarea, donde se pide explicar por qué el teorema de Tales es verdadero, el 20% de los estudiantes no utiliza argumentos. Muy pocos estudiantes (de 2 a 4%) razonan empíricamente. En la tarea donde se debe demostrar el teorema de Tales, el 74% emplea argumentos analíticos. Sin embargo, sólo el 19% emplea argumentos analíticos para demostrar el teorema de la intersección de los bisectores.

Con respecto a aspectos formales, las respuestas de la primera tarea (intersección de los tres bisectores) se escriben principalmente en palabras (narrativamente), mientras que las de la segunda tarea (teorema de Tales) son más formales. El 56% de los estudiantes no logra presentar argumentos para demostrar que los tres bisectores de los lados de un triángulo se intersecan. Si los estudiantes usan argumentos en dicha tarea, éstos son principalmente narrativos (22%). Por otra parte, el 58% de los participantes presenta una solución mixta, la cual se codifica como “narrativa y formal”. Se identifica una argumentación formal en el 2% de las respuestas de la primera tarea y en el 11% de las respuestas de la segunda. Sin embargo, en ambas tareas, la frecuencia relativa de las respuestas narrativas es mayor que la [frecuencia relativa] de los argumentos formales.

Discusión

Al inicio de sus estudios universitarios, los alumnos encuentran múltiples dificultades que se reflejan en altas tasas de abandono en matemáticas (Acuña et al., 2010). Los contenidos matemáticos y la argumentación en esta disciplina parecen ser especialmente desafiantes para los estudiantes de primer año (Hoyles et al., 2001; Engelbrecht, 2010). Dado que la argumentación matemática es una de las actividades más importantes, pero también una de las más complejas en este campo (Boero, 1999; Brunner, 2014), nos enfocamos en tres aspectos principales de la argumentación matemática de los universitarios de primer año: calidad de la argumentación, tipo de argumentación y uso de lenguaje matemático formal. Construimos un instrumento de medición que nos permitió comprender mejor el proceso de demostración matemática. Empleamos tres tareas abiertas en las cuales los estudiantes de primer año deben demostrar los teoremas presentados. En este artículo sólo nos referimos a los resultados de dos de los tres ítems, ya que el análisis aún no concluye. Los teoremas de cada tarea se refieren a contenidos geométricos que los estudiantes deberían haber aprendido en la educación secundaria. Así, podemos suponer que los estudiantes conocen los contenidos y que cualquier dificultad se debe principalmente a sus habilidades argumentativas.

Los resultados del análisis indican que el contenido de las tareas tiene un enorme impacto en la capacidad de desarrollar demostraciones correctas. La mayoría de los estudiantes de primer año (65%) logra demostrar correctamente el teorema de Tales, mientras que sólo el 10% resuelve bien la tarea que pide demostrar que los tres bisectores de los lados de un triángulo se intersecan. Los argumentos necesarios para demostrar el teorema de la intersección de los bisectores probablemente son más complejos y abstractos, por lo que los estudiantes enfrentan más problemas en esta tarea. Uno de los argumentos se basa en la distancia entre los vértices y el bisector. Los argumentos requeridos para demostrar correctamente el teorema de Tales se refieren principalmente a contenidos geométricos básicos, por ejemplo, temas relativos a ángulos. Al parecer, el desarrollo y selección de los argumentos correctos constituye un paso difícil dentro del modelo de Boero (1999). Asimismo, la exploración del contenido del teorema matemático parece ser algo complicado y estrechamente vinculado con los conceptos matemáticos del mismo. El 33% de los estudiantes no logra presentar argumentos matemáticos para demostrar que los tres bisectores de los lados de un triángulo se intersecan. Esto confirma que, en general, los alumnos que inician sus estudios universitarios tienen grandes dificultades para desarrollar argumentos matemáticos.

Los resultados referidos a los modelos de demostración no siguen un patrón definido. Aunque la mayoría de los estudiantes (74%) razona analíticamente en la tarea en la que se pide demostrar el teorema de Tales, sólo unos pocos (19%) emplean argumentos analíticos en la otra tarea. Ello indica que, en general, muchos estudiantes son capaces de ordenar sus argumentos de modo deductivo. Sin embargo, aún no poseen la capacidad de desarrollar argumentos deductivos en ambas tareas. Es evidente que no pueden transferir su conocimiento sobre la estructura correcta de una demostración matemática a otras tareas. Esto confirma los resultados disímiles de otros estudios sobre la argumentación matemática de alumnos de primer año. Algunos estudios documentan el uso frecuente de argumentos empíricos (Knuth, 2002; Martin y Harel, 1989), mientras que otros indican que los alumnos de primer año tienden a usar argumentos analíticos (Nagel y Reiss, 2016). Estos resultados podrían deberse a que, durante la transición entre las matemáticas escolares y universitarias, los estudiantes recién comienzan a aprender sobre la estructura de las demostraciones matemáticas. Puesto que las demostraciones suelen presentarse en su forma final en las clases universitarias, el desarrollo de dicho conocimiento no es constante. Obviamente existen tareas en las cuales los alumnos de primer año pueden generar demostraciones deductivamente, pero también hay otras en las que son incapaces de presentar argumentos matemáticos y deductivos.

El análisis de las respuestas recolectadas muestra que, en la tarea en que se pide demostrar el teorema de Tales, la mayoría de los participantes (58%) empleó una mezcla de expresiones narrativas y formales. En la otra tarea, en la que se debe demostrar que los tres bisectores de los lados de un triángulo se intersecan, el 20% de los estudiantes utilizó una combinación de palabras y lenguaje formal. El 22% de los participantes sólo empleó palabras para demostrar que los tres bisectores se intersecan. Dado que expresar respuestas usando lenguaje formal es más difícil para los estudiantes (por ejemplo, Wittmann y Müller, 1988), no es sorprendente que no logren demostrar formalmente que los tres bisectores de los lados de un triángulo se intersecan. Las respuestas a la tarea sobre el teorema de Tales, que se esperaba fuera más sencilla para los estudiantes, se expresan de modo más formal. Al parecer, si los participantes logran ordenar sus argumentos dentro de una cadena deductiva, también serán capaces de expresarlos formalmente.

La presente investigación entrega información valiosa sobre el proceso de generación de demostraciones de los alumnos que inician sus estudios matemáticos universitarios. Los contenidos geométricos y el formato de los ítems permite analizar la calidad de las argumentaciones, los modelos de demostración y el formalismo de las respuestas de los estudiantes. Los criterios de calidad (objetividad y validez del test) muestran valores adecuados, mientras que el coeficiente alfa de Cronbach (referido a la confiabilidad interna) fue bastante bajo debido a que la escala sólo tiene dos ítems. Analizamos la argumentación matemática de los estudiantes por medio de sólo dos tareas. Por lo tanto, los resultados presentados deben interpretarse con cautela. Es necesario continuar investigando para obtener conclusiones generales. Sin embargo, los resultados ilustran varios problemas que enfrentan los alumnos cuando deben demostrar un teorema al comienzo de sus estudios matemáticos. La argumentación matemática es un proceso complejo que requiere varias habilidades avanzadas (por ejemplo, Reiss y Ufer, 2009). Este estudio presenta información detallada con respecto a dónde se ubican estas dificultades en el ámbito de la argumentación matemática. Por ejemplo, los participantes tienen problemas para apoyar sus demostraciones mediante el uso de argumentos analíticos conectados deductivamente. Los resultados muestran que los estudiantes evidentemente se hallan en una fase en la cual están desarrollando sus habilidades de argumentación matemática. Sin embargo, en la primera tarea la calidad de la argumentación fue bastante baja y casi no se utilizaron argumentos en las demostraciones. En la segunda tarea, los participantes tuvieron un buen desempeño con respecto a ambas variables. El estudio indica que los universitarios de primer año necesitan más ambientes de aprendizaje que fomenten sus habilidades de razonamiento matemático. Por tanto, los resultados del estudio podrían ser un punto de partida para generar elementos de apoyo que, al estar adaptados a las habilidades de los estudiantes de primer año, les permitan aprender a desarrollar demostraciones matemáticas.

El artículo original fue recibido el 23 de noviembre de 2017
El artículo fue aceptado el 10 de abril de 2018

Referencias

Acuña, C., Makovec, M., & Mizala, A. (2010). Access to higher education and dropouts: evidence from a cohort of Chilean secondary school leavers. In *Paper presentando en el Primer Congreso Interdisciplinario de Investigación en Educación (CIIE)*, Santiago, Chile.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter in the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 7*(9).

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Retrieved from http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/MathStandards1.pdf

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Educational Studies in Mathematics, 42,* 225–235.

Fischer, A., Heinze, A., &Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule – Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In A. Heinze & M. Grüßing (Eds.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (pp. 245–264). Münster, New York, München, Berlin: Waxmann.

Fonseca, G. (2011). Distancia entre el currículo de enseñanza media y educación superior: una aproximación al caso de la universidad católica de la santísima concepción. . In L.E. González (Ed.), *El proceso de transición entre educación media y superior : experiencias universitarias* (pp. 209–234). Santiago de Chile: Alfabeta Artes Gráficas.

Gallardo, G., Lorca, A., Morrás, D., & Vergara, M. (2014). High School to College Transition Experiences of Students Admitted in a Chilean Traditional University (CRUCH) through Inclusive Special Admission. *Pensamiento Educativo: Revista de Investigación Educacional Latinoamericana (51),* 135–151.

González, E. (2011). La nueva juventud y el proceso de transición entre la educación media y la superior. In L.E. González (Ed.), *El proceso de transición entre educación media y superior : experiencias universitarias* (pp. 25–50). Santiago de Chile: Alfabeta Artes Gráficas.

Gutiérrez, A., Vega, A., Jara, E., Faúndez, F., Valassina, F., Vargas, G., … Del Valle, R. (2010). Evaluaciones diagnósticas aplicadas a estudiantes que ingresan a primer año de universidad. . In L.E. González (Ed.), *El proceso de transición entre educación media y superior : experiencias universitarias* (pp. 77–130). Santiago de Chile: Alfabeta Artes Gráficas.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning in Mathematics, 15*(3), 42–49.

Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. *JMD, 18*(2/3), 171–185.

Hanna, G, & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM, 40,* 329–336.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education III (7),* 234–282.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof concepts in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396–428.

Heinze, A., Cheng, Y.-H., Ufer, S., Lin, F.-L., Reiss, K. (2008). Strategies to foster students competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM, 40*(3), 443–453.

Heinze, A., & Reiss, K. (2007). Reasoning and proof in the mathematics classroom. *Analysis, 27*(2/3). doi: 10.1524/anly.2007.27.2-3.333

Herrera, R., González, E., Poblete, A. & Carrasco, S. (2011). Transición entre educación media y universidad: marco de referencia y experiencias internacionales. In L.E. González (Ed), *El proceso de transición entre educación media y superior : experiencias universitarias* (pp. 51–60). Santiago de Chile: Alfabeta Artes Gráficas.

Hoyles, C., Newman, K,, & Noss, R. (2001). Changing patterns of transition from school to university mathematics. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 32*(6), 829–845.

Knuth, E.J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 379.

Lakatos, I. (1979). Beweise und Wiederlegungen: Die Logik mathematischer Entdeckungen 14, Braunschweig: Vieweg.

Martin, W.G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41–51.

Ministerio de Educación. (2011). Matemática. Programa de Estudio para Segundo Año Medio: Unidad de Currículum y Evaluación (1st ed.). Santiago, Chile.

Ministerio de Education, (2015). *Guiones didácticos y guías para la y el estudiante.* Santiago de Chile: AMF Impresores.

Ministerio de Educación (2016). *Informe matrícula 2016, Educación Superior en Chile.* Santiago de Chile: AMF Impresores.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educaional Studies in Mathematics, 27*(3), 249–266.

Nagel, K, & Reiss, K, (2016). Zwischen Schule und Universität: Argumentieren in der Mathematik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 19*(2), 299–327.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationships between argumentation and proof be analyzed? *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 23–41.

Pérez, M. V., Castellanos, M. V., Díaz, A., González-Pienda, J. A. & Núñez, J. C. (2013). Dificultades de aprendizaje en estudiantes universitarios de primer año. Atenea (Concepción) (508), 135–150. doi: 10.4067/S0718-04622013000200010

Portales, S., Estay, G.,& Cabezas, M. (2015). Nivelación académica en matemática: ¿un factor que aporta a la disminución del abandono?. *Paper presented at the 5th Latin American Conference about dropout at Higher Education, Talca, Chile.* Retrieved form http://www.alfaguia.org/www-alfa/images/ponencias/clabesv/L4-Ponencias/5_CLABES_paper_140.pdf

Radovic, D., & Preiss, D. (2010). Patrones de discurso observados en el aula de matemática de segundo ciclo básico en Chile. *Psykhe (Santiago), 19*(2), 65-79.

Recio, A.M., & Godino, J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 83–99.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F., & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule* (pp.194–208). Münster, München: Waxmann.

Reiss, K., Heinze, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM, 40*(3), 455–467.

Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der DMV*(4), 155–177.

Rodríguez, B., Carreño, X., Muñoz, V., Ochsenius, H., Mahías P., & Bosch, A. (2013). ¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona ese saber con sus prácticas de enseñanza?. *Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación – FONIDE. Proyecto N°: F611150,* Departamento de Estudios y Desarrollo, Ministerio de Educación.

Sedlmeier, P., & Renkewitz, F. (2013). *Forschungsmethoden und Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler.* München: Pearson.

Solar, H., Deulofeu, J. (2014). Tratamiento de la contingencia desde el desarrollo de la competencia de argumentación en la aula de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27*, 317–325.

Solar, H., Giménez, C.A., & Piquet, J.D. (2012). Competencia de argumentación en la interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 30*(3), 133–154.

Toulmin, S.E. (2003). *The uses of argument*. Cambridge, U.K., and New York: Cambridge University Press.

Varas, L., Cubillos, L., & Jimenez, D. (2008). Análisis de la calidad de clases de Matemática. Teorema de pitágoras y razonamiento matemático. Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación – FONIDE. Proyecto N°: 209 – 2006, Departamento de Estudios y Desarrollo, Ministerio de Educación.

Wittmann, E.C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Ed.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (pp. 237–257). Bielefeld: Cornelsen.